Appendix – Een driehoek en twee vierkanten

DICK KLINGENS (e-mail: dklingens@gmail.com)

november 2016

1. Twee andere bewijzen van stelling 2

Zie voor beide andere bewijzen toch ook figuur 3a in het artikel.

1. Met vectoren. We stellen $A \equiv O$. Dan is:

$$\vec{OK} = \vec{OB_2} + \vec{OC_1} \text{ en } \vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB}$$

Met $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ is dan voor het inwendig product van $\vec{OK}$ en $\vec{BC}$:

$$\begin{aligned}\vec{OK}\bullet\vec{BC} &= (\vec{OB_2} + \vec{OC_1})\bullet(\vec{OC} - \vec{OB})\\ &= \vec{OB_2}\bullet\vec{OC} - \vec{OB_2}\bullet\vec{OB} + \vec{OC_1}\bullet\vec{OC} - \vec{OC_1}\bullet\vec{OB}\\ &= 0 - bc\cos(90^\circ + \alpha) + bc\cos(90^\circ + \alpha) - 0 = 0\end{aligned}$$

De vectoren $\vec{OK}$ en $\vec{BC}$ staan daarmee loodrecht op elkaar. Met andere woorden: *AM* staat loodrecht op *BC*.

Met toepassing van een eigenschap van het inwendig product (lengte van een vector [1]) en van de cosinusregel in driehoek *OBC* is:

$$\begin{aligned}OK^2 = |\vec{OK}|^2 &= \vec{OK}\bullet\vec{OK} = (\vec{OB_2} + \vec{OC_1})\bullet(\vec{OB_2} + \vec{OC_1}) = b^2 + c^2 + 2\cdot\vec{OB_2}\bullet\vec{OC_1}\\ &= b^2 + c^2 + 2bc\cdot\cos(90^\circ + \alpha) = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\\ &= BC^2\end{aligned}$$

Waarmee we opnieuw zien dat $OK = AK = BC$. ◊

2. Met complexe getallen. We kiezen ook hier $A \equiv O$, ten behoeve van het complexe vlak. En we veronderstellen bekend dat vermenigvuldiging van een complex getal *z* met *i* inhoudt dat het bijbehorend punt in het vlak wordt geroteerd over +90º met *O* als centrum.

We associëren de punten *B* en *C* opvolgend met $z = b$ en $z = c$. Verder gebruiken we overeenkomstige kleine letters, zodat $b_2 = ic$, $c_1 = -bi$. En daarmee is:

$k = b_2 + c_1 = ic + (-bi) = i(b - c)$

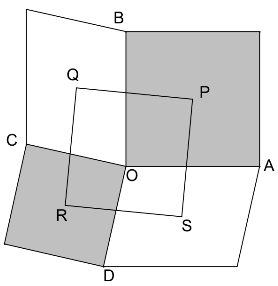
Nu volgt dat $\arg(k) = \arg(\, i(b - c)\,) = \arg(i) + \arg(b - c) = \pi/2 + \arg(b - c)$

Inderdaad, *OK* staat loodrecht op *BC*.

En verder is weer $OK = |k| = |\, i(b - c)\,| = |b - c| = BC$.

2. EPF Concours terminale 2003

figuur a1



Exercice 4
On considère la configuration obtenue à partir de deux carrés (en gris) ayant un sommet commun et de la construction de deux parallélogrammes (en blanc). Montrer que les centres des carrés et des parallélogrammes sont les sommets d'un carré. On prendra pour cela un repère d'origine O et on introduira les affixes des points A, B, C et D.

Vertaald – Men beschouwt twee vierkanten (grijs gevuld) die een hoekpunt gemeenschappelijk hebben met daarbij twee parallellogrammen (niet gevuld). Te bewijzen is dat de middelpunten van de vierkanten en die van de parallellogrammen de hoekpunten van een vierkant zijn. Neem daartoe een assenstelsel met oorsprong O en ken daarbij complexe getallen toe aan de punten A, B, C en D.

Het probleem moet, gezien de tekst, opgelost worden met complexe getallen. Maar daaraan voorafgaand geef ik toch eerst een oplossing binnen de analytische meetkunde.

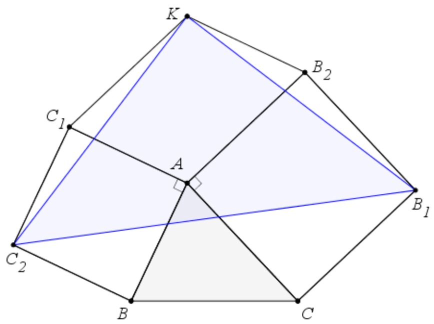
1 (analytisch). We kiezen een orthogonaal assenstelsel *xOy*, waarvan de *x*-as langs *OA* en de *y*-as langs *OB* valt.
Zonder de algemene geldigheid van hetgeen volgt, aan te tasten kiezen we $A = (2, 0)$ en C gelegen op een rechte lijn met vergelijking $y = mx$ (in de figuur is $m < 0$). Met $x_C = 2c$ ($c < 0$) is $C = (2c, 2mc)$.
Op basis van die keuzes is $B = (0, 2)$ en $D = (-2mc, 2c)$. Verder:
$P = (1, 1)$, $Q = (c, mc + 1)$, $R = (c - mc, mc + c)$, $S = (1 - mc, c)$
Voor de richtingscoëfficiënten (rico's) van de (dragers van de) zijden van vierhoek *PQRS* geldt dan:
rico(PQ) = $mc/(c - 1)$
rico(QR) = $(c - 1)/(-mc)$
rico(RS) = $-mc/(1 - c) = mc/(c - 1)$
rico(SP) = $(1 - c)/(mc) = (c - 1)/(-mc)$
Hieruit blijkt dat $PQ // RS$ en $QR // SP$.
Ook is:
$PQ^2 = (1 - c)^2 + (mc)^2$ en $QR^2 = (mc)^2 + (1 - c)^2$, zodat $PQ = QR$
En daarmee is vierhoek *PQRS* inderdaad een vierkant. ◊

2 (complex). We veronderstellen opnieuw bekend dat vermenigvuldiging van een complex getal z met i inhoudt dat het bijbehorend punt in het vlak wordt geroteerd over $+90^o$.
We associëren complexe getallen met de punten via kleine letters. Min of meer analoog aan het bovenstaande kiezen we A: $z = 2a$ en C: $z = 2(c + id)$. Dan is:
$b = 2ia$, $d = 2(-d + ic)$
En verder is dan ook:
$p = a + ia$, $q = c + i(a + d)$, $r = (c - d) + i(c + d)$, $s = (a - d) + ic$
En dan is:
$p - q = (a - c) - id$, $q - r = d + i(a - c)$
Daaruit blijkt dat $PQ^2 = QR^2 = (a - c)^2 + d^2$.
Verder is $i \cdot (p - q) = i \cdot (a - c) - i^2 \cdot d = d + i(a - c) = q - r$
En dit laatste wil niets anders zeggen dan dat *PQ* loodrecht staat op *QR*. ◊

3. Nog twee (extra) opgaven

De lezer vrage zich bij het eerste van onderstaande meetkundige problemen af of hij/zij een oplossing had kunnen vinden *zonder* het hieraan voorafgaande in het artikel te hebben gelezen.

figuur a2

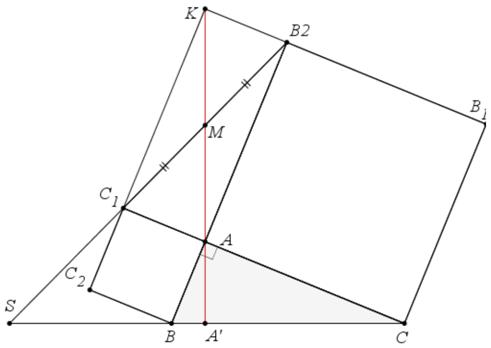


Opgave 1
In figuur a2 zijn op de zijden van driehoek *ABC* de vierkanten ACB_1B_2 en AC1C2B geplaatst. Ook is het ingevoegd parallellogram AB_2KC_1 getekend.

a. Toon aan dat driehoek KC_2B_1 gelijkbenig en rechthoekig is.
b. Beschrijf het bewijs zo kort mogelijk.

En nu 'ook maar' naar de rechthoekige driehoek.
Het volgende probleem kan heel eenvoudig worden opgelost met 'hoeken jagen'. Daarvoor heb je de theorie in het artikel niet echt nodig.

figuur a3



Opgave 2
In figuur a3 zijn op de zijden van de in A rechthoekige driehoek ABC vierkanten geplaatst. Ook is het ingevoegde parallellogram getekend. Verder snijden de lijnen B_2C_1 en CB elkaar in het punt S.

a. Toon aan dat de punten S, C_2, A en B_1 collineair zijn.
b. Toon aan dat de zwaartelijn AM van driehoek AB_2C_1 tevens hoogtelijn is van driehoek ABC.

4a. Een ander bewijs van onderdeel a van stelling 4

Zie voor dit bewijs ook figuur 8 in het artikel.
Bewijs. We stellen [2] $T = BB_1$ & CC_1. We zullen nu aantonen dat de lijn KA door het punt T gaat.
Niet zo voor de hand liggend, maar wel effectief en illustratief, is hier het gebruik van vermenigvuldigingen:
- V_1 is de vermenigvuldiging met centrum T die bepaald is door $V_1(B_1) = B$;
- V_2 is de vermenigvuldiging met centrum T die bepaald is door $V_1(C_2) = C$.

Zoals bekend is evenwijdigheid van lijnen invariant bij dit type afbeelding. En daarvan maak ik nu graag gebruik. En verder is $V_2V_1 = V_1V_2$ (zoals de lezer gemakkelijk kan nagaan).
Kijk nu goed:
- V_2V_1(lijn B_1B_2) = V_2(lijn BC_2) = lijn CC_1
- V_1V_2(lijn C_1C_2) = V_1(lijn CB_1) = lijn BB_2

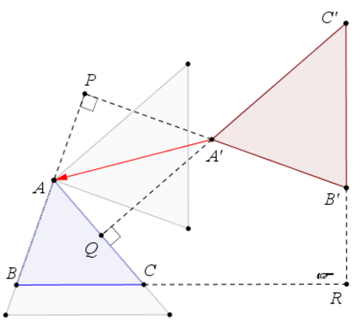
Met B_1C_2 & $C_1C_2 = K$ en CC_1 & $BB_1 = A$ is dan $V_2V_1(K) = A$.
Omdat T ook het centrum is van V_2V_1, volgt hieruit dat de punten K, A en T op dezelfde lijn liggen.
Anders gezegd: de lijnen KA, BB_1 en CC_2 zijn concurrent. ◊

4b.

In het bewijs van stelling 4 in het artikel is het volgende lemma genoemd.

Lemma. Als twee paar zijden van twee gelijkvormige driehoeken loodrecht op elkaar staan, dan staat ook het derde paar zijden loodrecht op elkaar. ◊

figuur a4

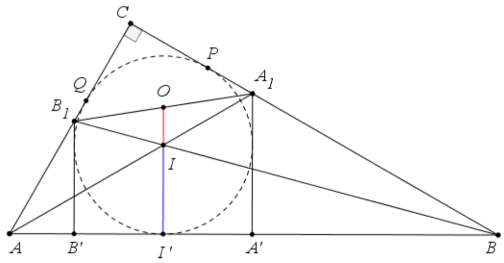


Bewijs. Zie figuur a4. Hierin zijn de driehoeken ABC en $A'B'C'$ gelijkvormig (hier direct [3]). De zijden AB, AC staan loodrecht op de overeenkomstige zijden van $A'B'C'$, opvolgend in P en Q.
We moeten nu aantonen dat BC in R loodrecht staat op $B'C'$.
Vierhoek $PBRB'$ is een koordenvierhoek; daarin zijn immers de hoeken B en B' elkaars supplement.
En daaruit volgt direct dat hoek R een rechte hoek is. ◊

5. Een ander bewijs van stelling 5

Bewijs. Zie figuur a5, waarin A' en B' de projecties zijn van A_1 en B_1 op AB. I' is de projectie van I.
We zullen aantonen dat de lijn II' door het midden O van A_1B_1 gaat.
Merk in de eerste plaats op dat I het middelpunt is van de incirkel [4] van de driehoek.

figuur a5

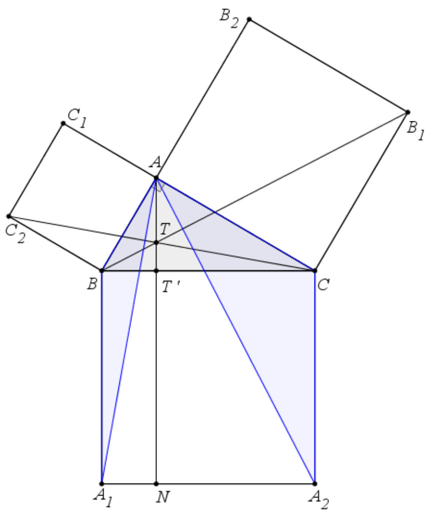


Uit het feit dat AA_1 en BB_1 bissectrices zijn, volgt dat $AC = AA'$ en $BC = BB'$ (congruentie van de paren driehoeken ACA_1, $AA'A_1$ en BCB_1, $BB'B_1$, beide volgens *ZHH*).
De incirkel raakt AC in Q en BC in P. Maar dan is:
$A'I' = AA' - AI' = AC - AQ = CQ$, met AI' = raaklijnstuk uit A,
en
$B'I' = BB' - BI' = BC - BP = CP$, met BI' = raaklijnstuk uit B.
Maar $CQ = CP$ (het zijn beide raaklijnstukken uit C aan de incirkel), zodat: $A'I' = B'I'$.
Daarmee is I' het midden van het lijnstuk $A'B'$ dat de rechthoekszijde is van het trapezium $A'B'B_1A_1$.
De lijn II' is daarin middenparallel en gaat *dus* (ook) door het punt O. ◊

6. Euclides' bewijs van de stelling van Pythagoras

De *Elementen* (Grieks: Στοιχεῖα – Stoicheia) is de naam van een meet- en rekenkundig verzamelwerk, bestaande uit dertien boeken, geschreven door de Griekse wiskundige Euclides (± 265-200 v.Chr., Alexandrië).
Euclides verzamelde en formaliseerde hierin een groot aantal wiskundige bewijzen van zogeheten proposities waarvan de meeste daarvoor reeds door anderen waren bewezen.
In boek I staat, als propositie 47 – de stelling van Pythagoras – door Euclides geformuleerd als (en in vertaling van E.J. Dijksterhuis [5]):
In rechthoekige driehoeken is het vierkant op de den rechten hoek onderspannende zijde gelijk aan [*de som van*] *de vierkanten op de den recht hoek insluitende zijden.*

figuur a6



In figuur a6 zijn op de zijden van de in A rechthoekige driehoek uitwendig vierkanten aangebracht.
Verder staan er de 'hulplijnen' AN, BB_1, CC_2, AA_1 en AA_2, waarvan er drie (CC_2, AA_1, AN) in figuur 1b in het artikel herkenbaar zijn.

In stelling 4 (in het artikel) is bewezen dat de lijnen AN, BB_1, CC_2 concurrent zijn in het punt T.

Het moet gezegd, Euclides bewees dat niet.

Maar de lezer ga na, dat die concurrentie noodzakelijk is voor het hierna volgende bewijs, dat overeenkomt met het bewijs dat in de *Elementen* staat.

Bewijs. De driehoeken ABA_1 en C_2BC zijn congruent (*ZHZ*). Dit houdt in dat ze gelijke oppervlaktes hebben. Verder is [6]:

$Ø(BA_1NT') = 2 \cdot Ø(ABA_1)$
Immers, beide figuren hebben dezelfde basis, BA_1, en hun hoogte ligt tussen de evenwijdige lijnen BA_1 en AN.
Om eenzelfde reden (basis BC_2, evenwijdige lijnen BC_2 en CC_1) is:
$Ø(BAC_1C_2) = 2 \cdot Ø(C_2BC)$, zodat:
(1)… $Ø(BA_1NT') = Ø(BAC_1C_2)$
Geheel analoog kan bewezen worden dat:
(2)… $Ø(CA_2NT') = Ø(CB_1B_2A)$
Optelling van de leden (eerst rechts, dan links) van de uitdrukkingen (1) en (2) geeft:
$Ø(BAC_1C_2) + Ø(CB_1B_2A) = Ø(BA_1NT') + Ø(CA_2NT') = Ø(BA_1A_2\mathrm{C})$
Of:
$c^2 + b^2 = a^2$ ◊

7. Noten

[1] Voor twee vectoren $\boldsymbol{u}$ en $\boldsymbol{v}$ geldt *per definitie* voor hun *inwendig product* $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$:

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \cos \varphi$

waarbij met $|\boldsymbol{u}|$ de lengte van de vector wordt bedoeld en met φ de hoek tussen die vectoren.
Dan is:
$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = |\boldsymbol{u}|^2 \cdot \cos 0 = |\boldsymbol{u}|^2$

[2] Met $X = AB$ & CD bedoelen we: X is het snijpunt van de lijnen AB en CD.

[3] Men spreekt van *direct gelijkvormige figuren* als bij een vermenigvuldiging van de ene figuur de andere daarmee *direct congruent* is.
En twee figuren zijn *direct congruent* als de ene figuur via translatie en/of rotatie op de andere kan worden afgebeeld.

[4] De *incirkel* van een driehoek is de ingeschreven cirkel van die driehoek.

[5] Dr. E.J. Dijksterhuis (1929): *De Elementen van Euclides*. Groningen: P. Noordhoff (1929), deel I, pp. 203-204.

[6] Met Ø(*XY*…) geven we in dit bewijs de (grootte van de) oppervlakte aan van de figuur *XY*…

